



**CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BRASÍLIA - UnICEUB**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS**  
**- FATECS**

**PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA**

**JOÃO PAULO PHILLIPI ISIDRO**

**ANÁLISE DE CARGAS DINÂMICAS EM VIGAS BI-APOIADAS COM**  
**AMORTECEDORES ATRAVÉS DA FERRAMENTA ANSYS**

**BRASÍLIA**  
**2017**



**NOME DO ALUNO**

**JOÃO PAULO PHILLIPI ISIDRO**

**ANÁLISE DE CARGAS DINÂMICAS EM VIGAS BI-APOIADAS COM  
AMORTECEDORES ATRAVÉS DA FERRAMENTA ANSYS**

Relatório final de pesquisa de Iniciação Científica  
apresentado à Assessoria de Pós-Graduação e  
Pesquisa pela Faculdade de Tecnologia e Ciências  
Sociais aplicadas - FATECS

Orientação: Prof. Dr. Marcos Rafael Guassi

**BRASÍLIA  
2017**

## **Agradecimentos**

Primeiramente ao meu orientado e professor Dr. Marcos Guassi pela paciência, apoio e dedicação; Ao professor João Marcos pelas oportunidades que me deu; A professora Dra. Rosana, Thiago Araujo, professor Kleber Pinheiro

## **ANÁLISE DE CARGAS DINÂMICAS EM VIGAS BI-APOIADAS COM AMORTECEDORES ATRAVÉS DA FERRAMENTA ANSYS**

**João Paulo Phillipi Isidro - UniCEUB, PIBIC-CNPq, aluno bolsista**  
*jpcn14@gmail.com*

**Marcos Rafael Guassi - UniCEUB, professor orientador**  
*marcos.guassi@uniceub.br*

A atuação de cargas móveis podem causar vibrações nas estruturas, como viadutos, pontes e passarelas de pedestres. Os esforços causados em cada parte da estrutura por essas cargas móveis variam em função do tempo, por isso a análise estática não é suficiente para se determinar todos os efeitos envolvidos, pois as análises estáticas não levam em consideração a inércia dos corpos, enquanto as análises dinâmicas, como a análise modal e a análise de transientes, consideram a inércia do sistema, e também são utilizadas para cálculo de outros parâmetros pertinentes, como os modos de vibração da estrutura, sendo, portanto, uma análise mais completa. A ação de forças de caráter móvel podem causar fadiga adiantada nos materiais, causando uma quebra prematura dos sistemas. E o uso de amortecedores nas extremidades da viga evitam a transferência de esforços das vibrações para os pilares. Além disso, é possível que um sistema fique subdimensionado se as variáveis dinâmicas não forem consideradas. A dinâmica de estruturas tem se mostrado cada vez mais importante e utilizada, principalmente com o desenvolvimento de ferramentas computacionais. Este trabalho apresenta uma análise computacional de vigas, de concreto e de aço, com geometrias diferentes nas seções transversais (viga retangular e viga I) com a presença de amortecedores colocados em diferentes pontos da extensão da viga, pela qual passam cargas móveis com velocidade constante. Foi utilizada a ferramenta ANSYS, com o seu módulo de transiente estrutural. O uso do amortecedor serve principalmente para induzir uma frequência de vibração diferente da frequência natural da viga, mas também para reduzir o deslocamento vertical da viga quando da passagem de carga. Como resultado, foi possível perceber uma diminuição dos esforços internos sobre a estrutura da ponte quando foi colocado o amortecedor, também ajudando no controle de vibração da estrutura, diminuindo sua amplitude de oscilação. O controle de oscilações da estrutura também se mostrou dependente da posição em que os amortecedores são colocados.

**Palavras-Chave:** Vigas, Transiente, Amortecedores



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução teórica</b>	<b>1</b>
1.1	Movimento Harmônico . . . . .	1
1.1.1	Movimento Harmônico Simples . . . . .	1
1.1.2	Movimento Harmônico Simples Amortecido . . . . .	3
1.2	Tipos de amortecedores . . . . .	9
1.3	Força externa atuante . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>11</b>
2.1	Objetivo geral . . . . .	11
2.2	Objetivos específicos . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Análise dos resultados</b>	<b>15</b>
4.1	Cálculo sobre vigas de concreto . . . . .	15
4.1.1	Viga retangular . . . . .	15
4.1.2	Viga em I . . . . .	18
4.2	Cálculo sobre vigas de aço . . . . .	22
4.2.1	Viga retangular . . . . .	22
4.2.2	Viga em I . . . . .	22
	<b>Conclusão</b>	<b>25</b>
	<b>Referência Bibliográfica</b>	<b>26</b>



# Capítulo 1

## Introdução teórica

Os estudos sobre vibrações em vigas começam a partir dos estudos de oscilações. Entender as equações que regem o movimento harmônico, seus detalhes e implicações nos permitem entender o movimento oscilatório dos corpos rígidos reais, tais como cabos elétricos numa linha de transmissão, ou elementos estruturais como vigas e pilares de pontes, viadutos, passarela de pedestres, lajes etc. Os trabalhos em dinâmica, partem de equações diferenciais relacionadas àquelas do movimento harmônico simples e acrescentam os termos pertinentes, como força externa (periódica ou móvel), momento de inércia e amortecimento, a cada estrutura que se deseja estudar.

Em uma viga, segundo Abreu [1], assim como em outros sistemas unidimensionais, a flexão sobre o sistema é a característica mais importante. Sendo assim, nossa análise terá foco nos deslocamentos verticais causados pela carga móvel.

Neste capítulo apresentaremos uma revisão sobre o movimento harmônico simples e amortecido mostrando as contas básicas para uma melhor introdução ao tema. Depois, explicaremos os tipos básicos de amortecedores utilizados em sistemas de engenharia e, por fim, do emprego das forças sobre o sistema.

### 1.1 Movimento Harmônico

#### 1.1.1 Movimento Harmônico Simples

O movimento harmônico simples (MHS) é o movimento unidimensional descrito por um sistema massa-mola que oscila sem atrito ou resistência do ar, a partir de uma força inicial mas que se mantém em movimento devido somente à força elástica exercida pela mola sobre a massa. Esse tipo de sistema, apesar de básico, pode ser utilizado como base para descrever qualquer sistema oscilatório [2].

Por ser a única força atuante, a força elástica de Hooke,  $F_e$ , é a responsável pela aceleração do bloco como dado pela segunda lei de Newton:

$$F_e = ma, \quad (1.1)$$

$$-kx = ma \quad (1.2)$$

sendo  $k$  a constante elástica da mola, uma propriedade relativa a cada mola,  $x$  a posição do bloco relativa à posição de equilíbrio da mola,  $m$  a massa do bloco e  $a$  a aceleração desse mesmo bloco em um dado instante de tempo. A aceleração do bloco pode ser escrita como a segunda derivada da posição em relação ao tempo. Assim,

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (1.4)$$

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0. \quad (1.5)$$

em que foi usado

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \quad (1.6)$$

e  $\ddot{x}$  denota a segunda derivada da variável  $x$  com relação ao tempo.

Para resolver essa equação diferencial, pode-se utilizar os métodos dos coeficientes constantes [3]. Com isso, tem-se

$$r^2 + \omega^2 = 0; \quad (1.7)$$

resolvendo esta equação para  $r$ ,

$$r = \pm i\omega. \quad (1.8)$$

Esse valor pode ser substituído na equação 1.5. resultando em:

$$x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad (1.9)$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$ , coeficientes a serem determinados.

Num sistema massa-mola, uma condição de contorno é a de que em  $t = 0$ ,  $x = A$ , sendo  $A$  a amplitude ou o deslocamento máximo a partir da posição de equilíbrio da mola. Aplicando-se esta condição,

$$A = c_1 e^0 + c_2 e^0 \quad (1.10)$$

$$A = c_1 + c_2 \quad (1.11)$$

A outra condição de contorno é que em  $t = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , que afirma que, no tempo inicial

a massa tem velocidade zero, temos:

$$\dot{x} = ic_1\omega e^{i\omega t} - ic_2\omega e^{-i\omega t} \quad (1.12)$$

$$0 = ic_1\omega e^0 - ic_2\omega e^0 \quad (1.13)$$

$$0 = (i\omega)(c_1 - c_2) \quad (1.14)$$

$$0 = c_1 - c_2 \quad (1.15)$$

$$c_1 = c_2 \quad (1.16)$$

Com esse resultado, e substituindo-se em 1.11, tem-se:

$$A = c_1 + c_1 \quad (1.17)$$

$$A = 2c_1 \quad (1.18)$$

$$c_1 = c_2 = \frac{A}{2} \quad (1.19)$$

A equação 1.9 dará

$$x = \frac{A}{2}e^{i\omega t} + \frac{A}{2}e^{-i\omega t}; \quad (1.20)$$

$$x = \frac{A}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (1.21)$$

Como,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (1.22)$$

A equação 1.21 resultará em:

$$x = A \cos(\omega t) \quad (1.23)$$

A equação geral de um MHS, portanto, é uma função cossenoide que varia em função do tempo. Ela possui amplitude constante  $A$ , que não se altera com o tempo. Esse fato é esperado, uma vez que os possíveis atritos já foram desconsiderados. Um gráfico, feito em FORTRAN, da posição do objeto em função do tempo, descrito pela equação 1.23, é apresentado na figura 1.1.

### 1.1.2 Movimento Harmônico Simples Amortecido

O sistema MHS, como já mencionado, não inclui atrito de nenhuma natureza. Por sua velocidade ser baixa, pode-se considerar que uma força de amortecimento genérica terá a forma  $F_a = -b\dot{x}$ , sendo  $b$  o parâmetro de amortecimento e  $\dot{x}$  a velocidade do bloco. A equação diferencial que descreve o sistema, então, será:

$$F_r = F_e + F_a \quad (1.24)$$

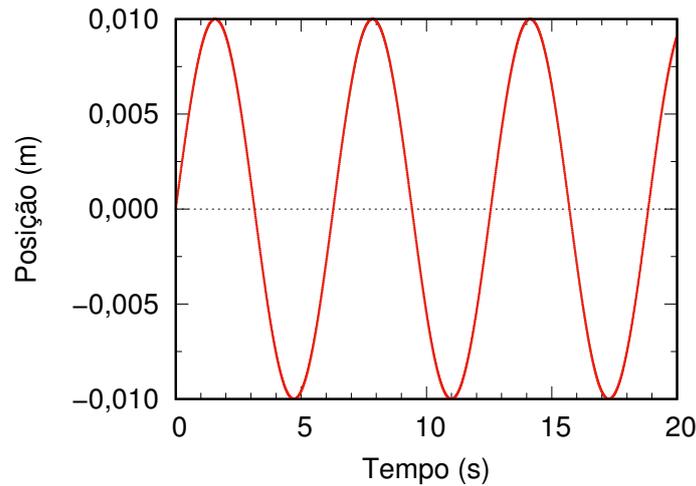


Figura 1.1: Gráfico representando um MHS obtido com a equação 1.23.

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.25)$$

em que foi utilizado  $\omega_0$  para se escrever a frequência natural do sistema. Essa EDO também pode ser resolvida pelo método dos coeficientes constantes. Com isso,

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0, \quad (1.26)$$

sendo

$$2\beta = \frac{b}{m}. \quad (1.27)$$

Resolvendo para  $r$ ,

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (1.28)$$

sendo que a raiz quadrada pode ter três resultados,

$$\beta > \omega_0 \text{ raiz positiva,} \quad (1.29)$$

$$\beta < \omega_0 \text{ raiz negativa,} \quad (1.30)$$

$$\beta = \omega_0 \text{ raiz nula.} \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

Também substituiremos  $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \omega_1$  nas próximas expressões

**Supercrítico**

O movimento harmônico possui um amortecimento supercrítico quando  $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} > 0$ . Neste caso, os valores de  $r \in \mathbb{R}$ . Dessa forma,

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (1.33)$$

Substituindo na solução geral da EDO,

$$x = e^{\beta t} (c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{-\omega_1 t}) \quad (1.34)$$

Em que  $c_1$  e  $c_2$  são coeficientes a serem determinados pelas condições de contorno e de valor inicial do sistema.

A condição de contorno  $t = 0$  em  $x(0) = x_0$  garante que, no instante inicial, a massa está no deslocamento máximo com relação à posição de equilíbrio. Com ela,

$$x(0) = e^{\beta t} (c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{-\omega_1 t}) \quad (1.35)$$

$$x_0 = c_1 + c_2 \quad (1.36)$$

Aplicando a outra condição de contorno, em  $t = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , no instante inicial, a velocidade da massa é zero,

$$\dot{x} = -\beta e^{-\beta t} (c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{-\omega_1 t}) + e^{-\beta t} (c_1 \omega_1 e^{\omega_1 t} - c_2 \omega_1 e^{-\omega_1 t}) \quad (1.37)$$

$$\dot{x}(0) = -\beta x_0 + e^{-\beta 0} (c_1 \omega_1 e^{\omega_1 0} - c_2 \omega_1 e^{-\omega_1 0}) \quad (1.38)$$

$$v_0 = -\beta x_0 + \omega_1 (c_1 - c_2) \quad (1.39)$$

$$v_0 + \beta x_0 = \omega_1 (c_1 - c_2) \quad (1.40)$$

$$\frac{v_0 + \beta A_0}{\omega_1} = c_1 - c_2 \quad (1.41)$$

Juntando a equação 1.36 com 1.41, tem-se:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ c_1 - c_2 = \frac{v_0 + \beta A_0}{\omega_1} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontra-se

$$c_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \beta x_0}{2\omega_1} \quad (1.42)$$

$$c_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \beta x_0}{2\omega_1}, \quad (1.43)$$

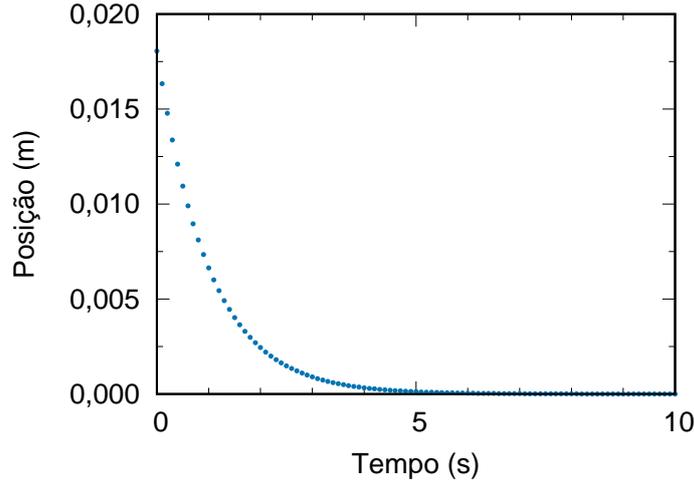


Figura 1.2: Representação gráfica do movimento harmônicos simples com amortecimento supercrítico.

e, portanto,

$$x = e^{\beta t} \left( \left( \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \beta x_0}{2\omega_1} \right) e^{\omega_1 t} + \left( \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \beta x_0}{2\omega_1} \right) e^{-\omega_1 t} \right) \quad (1.44)$$

$$x = \frac{e^{-\beta t}}{2} \left( x_0 (e^{\omega_1 t} + e^{-\omega_1 t}) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1} (e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t}) \right) \quad (1.45)$$

Observando a equação 1.45 e p gráfico 1.2, percebe-se que não há movimento oscilatório, visto que não há funções seno e coseno. O que acontece é um decaimento exponencial. Esse tipo de solução é interessante na aplicação a uma viga, pois após a aplicação de uma força sobre o sistema, não é desejado o mesmo fique oscilando livremente por um longo período de tempo.

### Subcrítico

O amortecimento é subcrítico quando  $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0$ . Neste caso, os valores de  $r \in \mathbb{C}$ . Neste caso,

$$r = -\beta \pm i\omega_1. \quad (1.46)$$

Substituindo essa expressão na equação 1.33,

$$x = e^{-\beta t} (c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_1 t}) \quad (1.47)$$

Segundo Feynman [4], o resultado tem que ser de tal maneira que  $c_2$  seja o conjugado imaginário de  $c_1$ , ou seja:

$$c_1 = C + iD \quad (1.48)$$

$$c_2 = C - iD = c_1^* \quad (1.49)$$

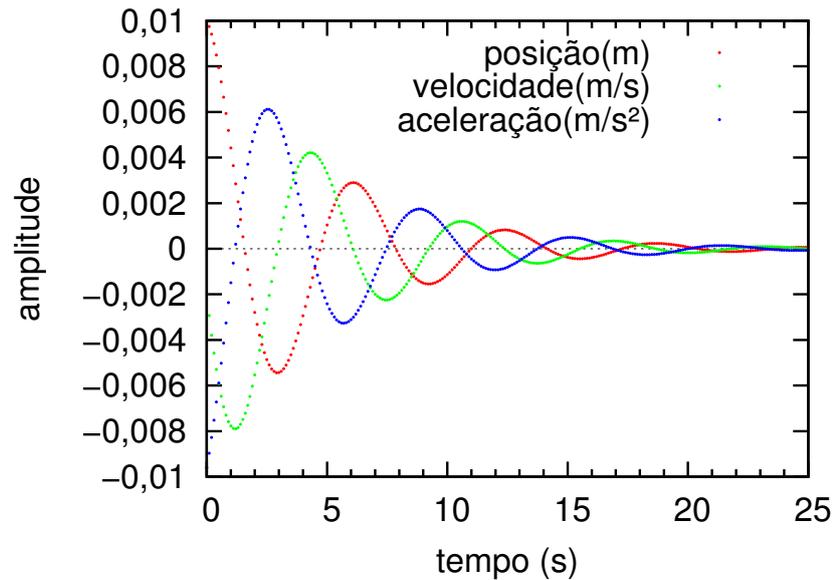


Figura 1.3: Representação gráfica da posição, velocidade e aceleração do MHS com amortecimento subcrítico.

Assim,

$$x = e^{-\beta t} ((C + iD)e^{i\omega_1 t} + (C - iD)e^{-i\omega_1 t}) \quad x = e^{-\beta t} (C(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + iD(e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t})) \quad (1.50)$$

$$x = e^{-\beta t} (2C \cos(\omega_1 t) + 2D \sin(\omega_1 t)) \quad (1.51)$$

Iremos substituir  $C$  por  $\frac{A}{2} \cos(\phi)$  e  $D$  por  $-\frac{A}{2} \sin(\phi)$ , nisso temos a seguinte equação:

$$x = e^{-\beta t} \left( 2\frac{A}{2} \cos(\phi) \cos(\omega_1 t) - 2\frac{A}{2} \sin(\phi) \sin(\omega_1 t) \right)$$

$$x = e^{-\beta t} (A \cos(\phi) \cos(\omega_1 t) - A \sin(\phi) \sin(\omega_1 t))$$

$$x = e^{-\beta t} (A \cos(\omega_1 t + \phi))$$

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Essa fórmula rege como o corpo vai se comportar, visto que  $A$  é a amplitude do sistema. Logo, se um sistema tem suas condições de maneira ideal, tal que  $t = 0$  e  $\phi = 0$ ,  $\cos(\omega_1 t + \phi)$  e  $e^{-\beta t}$  vão para 1, como ambos multiplicam  $A$ ,  $x(0) = A$ . Porém se  $\phi \neq 0 / \phi \in [0, 2\pi]$ ,  $\cos(\omega_1 t + \phi) \neq 1$  em  $t = 0$ , logo, esse oscilador não terá a mesma amplitude que o outro, e não se comportará exatamente igual o primeiro.

### Crítico

O amortecimento crítico é o caso que aparece quando a raiz se anula,  $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 0$ , ficando somente  $r = -\beta$ . Dessa maneira,

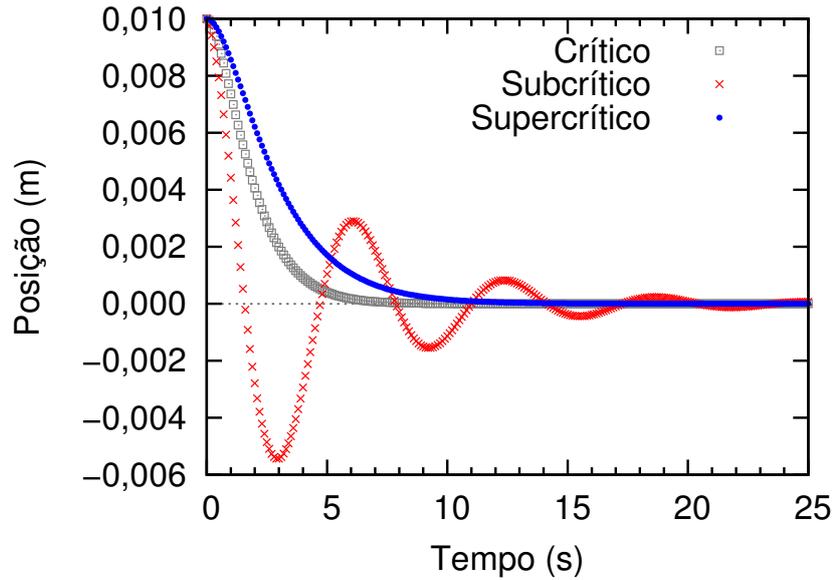


Figura 1.4: Gráfico comparando os três tipos de amortecimento de um MHS: crítico, subcrítico e supercrítico.

$$x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}. \quad (1.52)$$

E,

$$x = e^{-\beta t} (c_1 + c_2 t) \quad (1.53)$$

Aplicando a condição de contorno  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0$ ,

$$x(0) = e^{-\beta 0} (c_1 + c_2 0), \quad x_0 = c_1. \quad (1.54)$$

A outra condição de contorno  $t = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^{-\beta t} (c_2 - \beta x_0 - \beta c_2 t) \\ \dot{x}(0) &= e^{-\beta 0} (c_2 - \beta x_0 - \beta c_2 0) \\ v_0 &= c_2 - \beta x_0 \\ v_0 + \beta x_0 &= c_2 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Sabendo as constantes  $c_1$  e  $c_2$  substituímos na equação 1.53 e,

$$x = e^{-\beta t} (x_0 + (\beta x_0 + v_0)t) \quad (1.56)$$

Da mesma maneira que a equação do supercrítico não tem função seno e cosseno, essa função também não tem. Ela tem um decaimento exponencial, que também pode ser desejável nos casos em que iremos tratar.

Na resolução analítica completa do sistema, segundo Rodrigues [5], ainda seria

necessário levar em conta o termo relativo ao momento de inércia (I)

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4}, \quad (1.57)$$

e ao módulo de elasticidade da estrutura, (E). No entanto, não nos prolongaremos nestas resoluções, optando, por hora, pelo tratamento computacional do sistema.

## 1.2 Tipos de amortecedores

Segundo [6], os principais tipos de amortecedores de um sistema dissipador de energia mecânica são os de amortecimento interno ou atrito, amortecimento estrutural e amortecimento fluídico. O amortecimento interno é aquele realizado pelos componentes de um sistema no nível de microestrutura, associados aos materiais da construção e efeitos causados por diferenças de temperatura. O amortecimento estrutural surge a partir da deformação e elasticidade própria dos componentes da estrutura. Ainda segundo [6], este tipo de amortecimento também é conhecido como amortecimento de Coulomb, por se tratar do deslizamento entre superfícies secas. O amortecimento associado a um fluido conta com um sistema estrutural externo, que se move dentro de um fluido, gerando uma força de arraste.

O sistema que utilizaremos nesse trabalho é aquele que pode ser associado a um amortecimento estrutural que obedece à lei de Hooke. Ele pode ser um sistema do tipo neoprene com camadas de aço. Um tipo similar é o amortecedor de massa sintonizado utilizado no trabalho realizado por Emilly [7]. No entanto, este faz uso de uma massa extra no amortecedor que aumenta a inércia do sistema, coisa que o nosso sistema não possui.

## 1.3 Força externa atuante

A atuação de cargas externas atuantes sobre o sistema adotado nesse trabalho é considerada como sendo um eixo de caminhão bi-trem que passa sobre a viga. Devido a limitações encontradas no programa ANSYS, não foi possível variar a velocidade do caminhão sobre a viga, mantendo-se ela, com velocidade constante.

Assim como no trabalho de [8], o percurso de cada carga móvel é definido por elementos finitos que pertençam à estrutura. Em um intervalo de tempo, a força atua sobre um elemento e seus vizinhos mais próximos. Posteriormente, a força deixa de atuar nesse elemento e atuno em algum mais adiantado na estrutura, até o ponto que cessem os elementos da viga.

No trabalho realizado por Emilly [7], além da carga se mover com velocidade constante, também o amortecedor se desloca no comprimento da viga. Nosso trabalho adotará uma metodologia mais simples, em que as cargas se movem mas o amortecedor se encontra estático.

O valor da força exercida pela carga móvel, é definido pela NBR 7188 (2013) "Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas".

O texto de Rossigali [9] discorre sobre a versão antiga da norma, de 1982, definindo a distância entre-eixos dos veículos e suas distribuições de peso. Rossigali ainda afirma que *"A força de cada eixo sobre o pavimento é a carga estática do eixo afetada pelos efeitos dinâmicos oriundos da vibração vertical do veículo em movimento sobre o pavimento rugoso"*. Nesse trabalho, definimos uma carga estática por pneus e simularemos computacionalmente os efeitos dinâmicos a partir das deformações verticais causados sobre a viga.

# Capítulo 2

## Objetivos

### 2.1 Objetivo geral

Modelagem numericamente, no software ANSYS, vigas bi-apoiadas sem e com amortecedores de diferentes materiais e geometrias, sob a ação de uma carga móvel sobre a viga, comparando os valores de deformações e esforços em vigas de diferentes posicionamentos dos amortecedores, otimizando o valor das constantes elásticas dos amortecedores.

### 2.2 Objetivos específicos

- Apresentar modelo capaz de representar o comportamento das vigas em formato retangular e viga I;
- Analisar esforços, tensões e deformações das vigas através da modelagem numérica no software ANSYS;
- Apresentar os diferentes resultados referentes à velocidade da força dinâmica externa;
- Obter resultados referentes à presença e posicionamento dos amortecedores relação à viga, dos valores de suas constantes elásticas, buscando obter conclusões que auxiliem na escolha do uso adequado de tais amortecedores.



# Capítulo 3

## Metodologia

A primeira abordagem ao problema consistiu em buscar na literatura e refazer analiticamente as contas de um sistema de oscilação, dadas pelas equações do movimento harmônico simples. Especificamente, estávamos interessados na análise dos cálculos que possuíam amortecimento e forças externas atuando. Os sistemas amortecidos foram recriados em detalhes, pois o conhecimento de seus fenômenos permite visualizar melhor os efeitos observados por vibração nas vigas.

Para simular computacionalmente o sistema estrutural, utilizamos o programa ANSYS. O ANSYS é um software que calcula resultados aproximados a partir do método dos elementos finitos. A modelagem foi feita considerando uma viga com um apoio rígido no início da viga e um apoio móvel no final; o amortecedor atua em uma área escolhida de  $0,5m \times 0,1m$  e que possui um coeficiente de resistência  $C$ . O valor de  $C$  foi variado entre simulações com o objetivo de analisar a possível existência de comportamentos observados nos estudos previamente feitos sobre movimentos harmônicos, principalmente o amortecido, onde foram observados três tipos de comportamento: subcrítico, crítico e supercrítico. A face superior de cada viga foi dividida em retângulos de  $0,5m \times 0,05m$ , gerando 200 faces por onde a força móvel atua na viga, variando a sua posição em função de quais retângulos ela vai atuar em cada passo de tempo. Feita a sistematização da viga, foram definidos quais resultados o software deverá resolver e, então, foi dado o comando para o programa executar a simulação. Com o término dos cálculos, o software mostra uma representação da viga e os resultados numéricos em formato de tabela, podendo gerar um gráfico ou permitindo que se exportem esses para que outro programa também construa gráficos. Nestes casos, utilizamos também o programa Gnuplot.

Os materiais escolhidos para formar a viga foram concreto e aço, pois são os materiais mais utilizados na construção civil brasileira. Porém, a viga de concreto simulada não foi armada pois foi decidido por um modelo mais simples de modelar e com menor custo computacional. Sendo assim, a viga de concreto simulada serve como um primeiro estudo das vigas e seus resultados, uma aproximação da viga de concreto armado. Mesmo sem o aço, o momento de inércia e a amplitude de deformação vertical da flecha não deveriam ser de grande diferença. As geometrias das vigas foram escolhida com o intuito de que elas deveriam apresentar momentos de inércia parecidos, mostrando a eficiência da viga em I, mesmo tendo uma área menor do que a retangular.



# Capítulo 4

## Análise dos resultados

Nesse capítulo serão feitas as análises dos resultados obtidos com a simulação e a comparação entre as geometrias e posicionamentos das molas.

Os modelos abordados por essa pesquisa são teóricos, visto que foi analisado somente a atuação da carga dinâmica na viga, desconsiderando o peso próprio da estrutura e, também as vigas de concreto não estão armadas para simplificar a simulação. Em uma situação real, a tração gerada nas fibras interiores levaria a estrutura à colapso. Porém, se ela fosse armada, apresentaria resultados melhores, pelo fato de que o Momento de inércia ( $I$ ) e o Modulo de Elasticidade ( $E$ ) da viga como um todo estariam maiores, diminuindo a flecha e as tensões sofridas.

### 4.1 Cálculo sobre vigas de concreto

As propriedades do concreto irão se manter para todos os casos, e elas são:

$$\rho_c = 2300 \text{Kg/m}^3 \quad (4.1)$$

$$\sigma_c = 41 \text{MPa} \quad (4.2)$$

$$E = 30 \text{GPa} \quad (4.3)$$

#### 4.1.1 Viga retangular

A viga de seção retangular adotada é de  $0,5m$  de espessura e  $1,0m$  de altura, tendo, então um momento de inércia igual a:

$$I_x = 0,042 \text{m}^4 \quad (4.4)$$

O vão ente os apoios é de  $10m$ , a carga dinâmica que passa em cima de todas as vigas foi definida a partir do peso máximo permitido para um conjunto de eixos de um bitrem de 9 eixos, dividindo entre cada pneu e majorando o peso, simulando uma excesso de carga no caminhão, pratica que é relativamente comum no Brasil, o valor dela é de 6 toneladas, transformando para força, fica  $58,8kN$ .

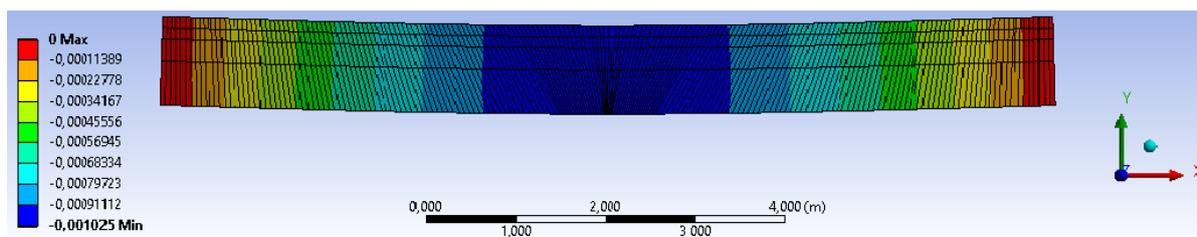


Figura 4.1: Representação gerada pelo software ANSYS da viga de concreto de geometria retangular sem amortecedor com deformações em escala de 100:1

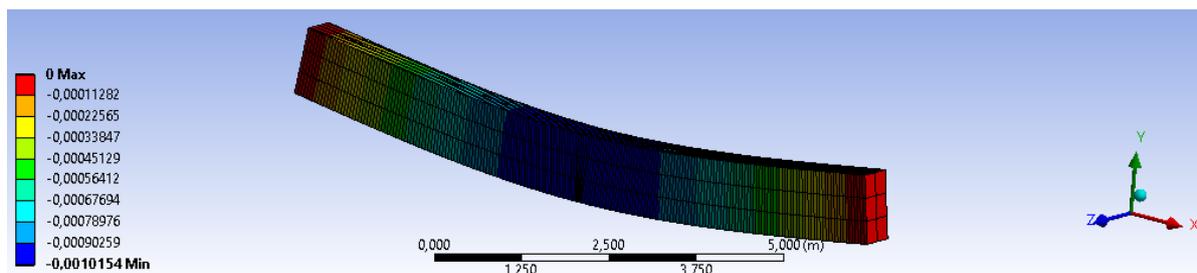


Figura 4.2: Representação da viga de concreto de geometria retangular com amortecedor de  $k = 500kN/m$  com as deformações em escala de 500:1

Para termos um ponto de referência, será avaliada a viga sem o amortecedor e o seu comportamento. A carga passa em cima da viga e quando atinge a metade do vão apresenta a flecha máxima de, aproximadamente  $1,025mm$ . Após isso, ela continua seu caminho até o final da viga. Observando a viga representada na imagem 4.1, é perceptível que há deformações na viga, essas deformações geram esforços internos de tração e compressão. Tomando que, pela maneira como a viga deforma, pode-se dizer que o corpo dela faz parte de uma circunferência, porém, por ser um objeto em  $3D$ , diferentes valores de  $y$  na viga dariam tamanhos de raios diferentes, e também, valores de circunferências diferentes, por causa disso, as fibras mais internas a circunferência tem tamanhos menores que as fibras mais externas. Quando calculado, a fibra na altura do centro de massa da viga tem o mesmo tamanho da viga indeformada, como as fibras mais acima estão menores do que elas eram, elas sofrem compressão, as fibras inferiores estão maiores, logo, sofrem tração.

O primeiro amortecedor proposto é um que atua em uma área de  $0,5 \times 0,1$  metros no meio da viga e com rigidez ( $C$ ) de  $10^7 N/m^3$ , quando linearizado, pode ser representado como uma mola com constante ( $k$ ) igual a  $500kN/m$ . Quando a carga passa por cima da viga e chega no meio do vão, a flecha tem valor de  $1,0154mm$ , uma redução de  $0,94\%$  em relação a flecha sem o amortecedor, é insignificante. Logo, o intuitivo é aumentar o  $k$  da mola

Mantendo a mesma área e posição do amortecedor, aumentaremos o  $C$  para  $10^9 N/m^3$  e com isso, a linearização terá uma mola com rigidez de  $k = 50MN/m$ , com esse aumento, a flecha da viga vai agora para  $0,55395mm$ , uma redução de  $45,96\%$ , uma redução de valor considerável.

Com esse novo aumento, o comportamento da viga começa a mudar, o amortecedor em um estagio de transição entre uma mola e um apoio rígido, ele ainda permite

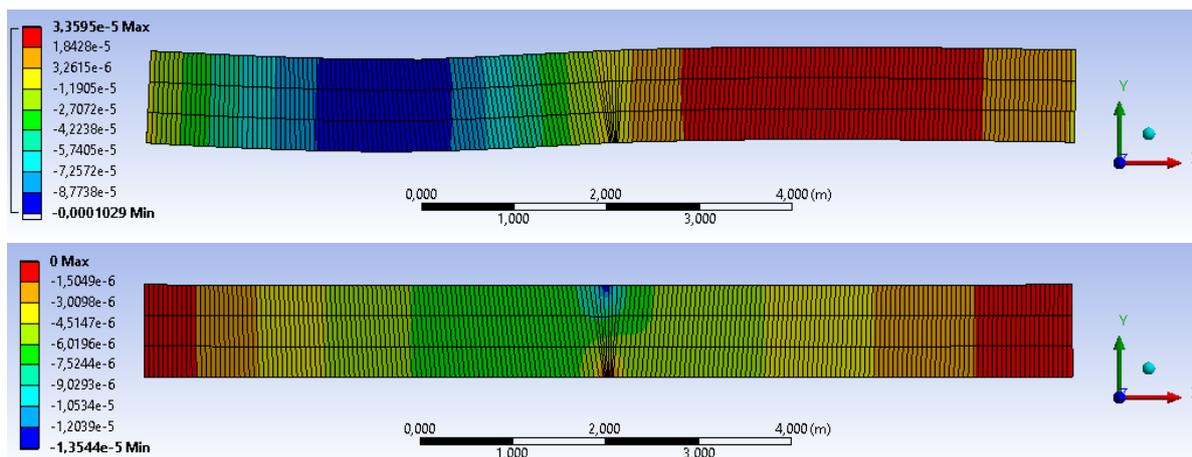


Figura 4.3: Representações da viga de concreto com geometria retangular com amortecedor de  $k = 500GN/m$  em tempos diferentes, a primeira com a força a  $1/4$  da viga e a outra no meio dela, com deformações em escala de 1000:1

deslocamentos verticais, porém, a maior flecha não se encontra mais no meio da viga, mas entre os apoios e a mola. Quando a força assume também essa posição a flecha da viga cai para 0,  $16672mm$

Agora, quando colocado um amortecedor com  $C$  de  $10^{13}N/m^3$ , sendo linearizado para uma mola com  $k = 500GN/m$ , a rigidez da mola é tão grande, ela se comporta como um apoio rígido, a flecha em cima da mola é 0, ela não permite mais deslocamento vertical, em compensação, ele efetivamente diminui o vão da viga pela metade.

É possível perceber por meio de 4.3 que, no momento em que a força se encontra entre o apoio no início da viga e o amortecedor, ela tem um deslocamento para baixo na região onde a força é aplicada enquanto que no lado oposto há uma deformação para cima, gerando tração nas fibras superiores, e o mesmo se repete, só que espelhado, quando a força passa a atuar entre o amortecedor e o outro apoio. Também é observável que no momento em que a força se encontra em cima do amortecedor, a flecha é 0, mostrando que ele se comporta como um apoio rígido

A partir de agora, todos os sistemas analisados terão molas com  $k = 50MN/m$ , foi escolhido esse  $k$  pois ele apresentou resultados consideráveis, 45,96% de redução de flecha, sem começar a se comportar como um apoio rígido. O gráfico 4.4 deixa muito claro a grande diferença de comportamento entre as 4 molas. Ele deixa ainda mais evidente o quanto a mola com  $k = 500kN/m$  não altera o comportamento da viga, enquanto os outros amortecedores geram influências diferentes, com o amortecedor de  $= 50MN/m$  permitir com que a viga se deforme no meio do vão com maior amplitude, o de  $k = 500MN/m$  apresentando uma rigidez alta suficiente para que o ponto central da viga não fosse o de maior deformação, mas, ainda sim, permitindo deformações e o de  $k = 500GN/m$  apresentando comportamento quase idêntico com o de um apoio rígido.

Colocando mais amortecedores em posições diferentes, obteve-se resultados um tanto inusitados. Colocando 2 amortecedores, um a  $1/4$  do início da viga e outro a  $3/4$ , quando a carga passa no meio da viga, a flecha foi de  $0,67315mm$ , uma flecha maior do que a viga com um único amortecedor, e isso se explica entendendo como

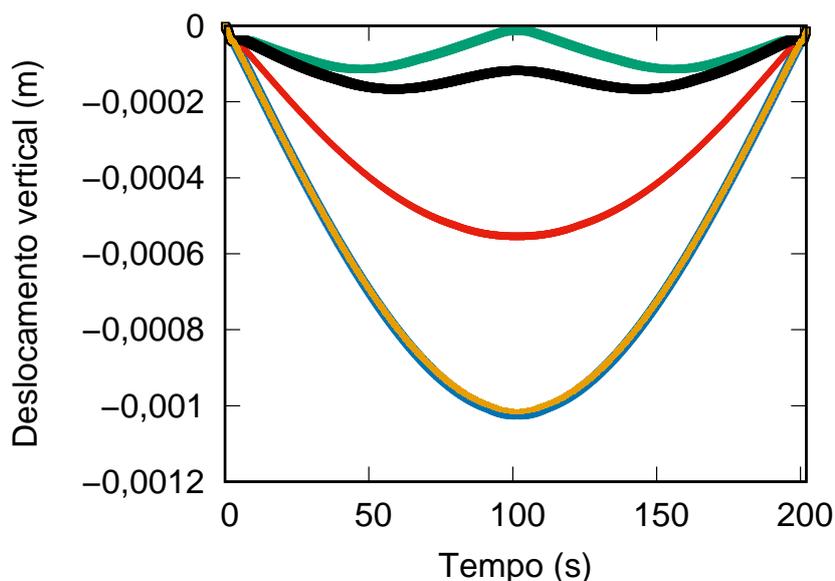


Figura 4.4: Gráfico de comparação do deslocamento vertical máximo naquele instante de tempo entre as vigas de geometria retangular sem (azul) e com amortecedores com  $k$  diferentes ( $k = 500kN/m$  amarelo;  $k = 50MN/m$  vermelho;  $k = 500Mn/m$  preto;  $k = 500GN/m$  verde)

as molas funcionam. A força de reação das molas é descrita pela seguinte equação:

$$F_{mola} = -ky \quad (4.5)$$

Onde  $y$  é a deformação no eixo da mola, no caso, o eixo  $y$ . A deformação que a mola sofre é limitada pela deformação da viga, como as molas não se encontram no meio da viga, elas não conseguem aproveitar a máxima deformação, logo, não geram força de reação igualmente efetiva como no caso de um amortecedor no meio. A partir disso, será colocado mais um amortecedor, no meio da viga, junto com os outros dois previamente colocados. Quando feito isso, a flecha cai para  $0,43349mm$ , uma redução de  $57,71\%$  em relação a flecha sem nenhum amortecedor.

#### 4.1.2 Viga em I

Foi escolhida uma viga com geometria I em que cumprisse dois critérios, que tivesse as dimensões totais vertical e horizontal iguais a da viga retangular e tivesse um volume menor que a metade da retangular, tendo assim, uma economia de concreto, sem ter uma grande diferença no momento de inercia. O momento de inercia da viga em I é:

$$I_x = 0,032m^4 \quad (4.6)$$

O vão entre os apoios é de  $10m$ , a mola será colocada no meio do vão e será aplicada a mesma carga. Primeiro será avaliada a viga sem amortecedor para ter uma referencia e uma comparação

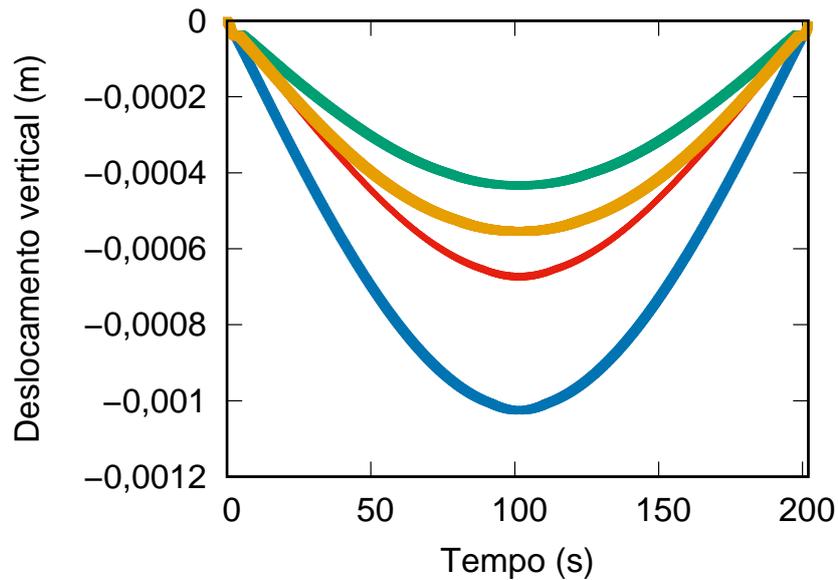


Figura 4.5: Gráfico de comparação do deslocamento vertical máximo naquele instante de tempo entre as vigas de concreto de geometria retangular sem (azul) e com um (amarela) dois (vermelha) e três (verde) amortecedores de  $k = 50MN/m$

A carga passa pela viga e quando chega no meio do vão ela tem flecha de  $1,5095mm$ , após isso a carga continua até o final da viga. Observando o gráfico 4.6, é possível perceber que a viga em I teve uma deformação vertical maior que a retangular, porém, com uma redução de  $55,2\%$  do volume total da viga, houve uma redução somente de  $23,81\%$  no momento de inércia, provando que seria possível ter uma viga com economia de concreto, sem prejudicar o momento de inércia.

Quando colocado o amortecedor, a flecha cai para  $0,69048mm$ , uma redução de  $54,26\%$ .

Foram colocados amortecedores nas posições  $1/4$  e  $3/4$  do comprimento da viga, quando a carga atingiu o meio do vão, a flecha foi igual a  $0,75538mm$ , uma redução de  $49,96\%$ , de novo, uma redução menor do que a da viga com um amortecedor no meio.

Adicionando o amortecedor no meio da viga, junto com os outros dois há uma redução na flecha de  $68,15\%$ , fazendo ela cair para  $0,48076mm$ .

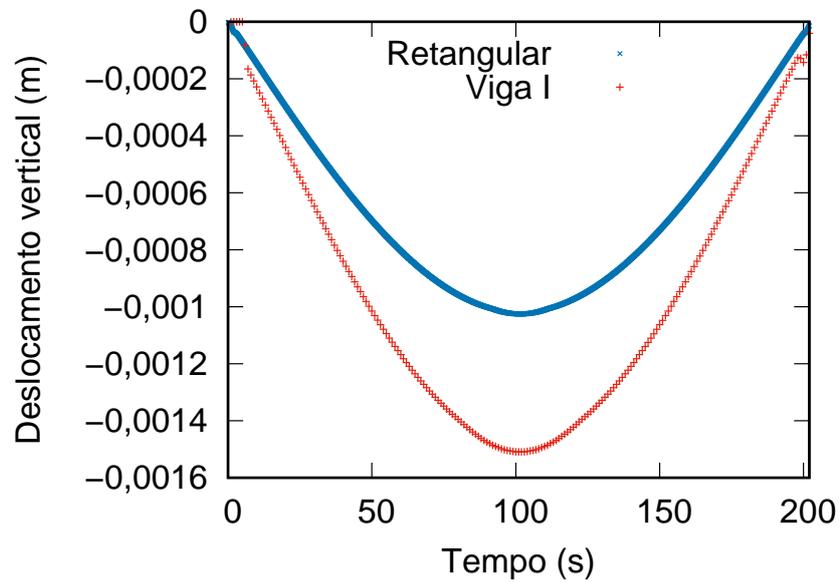


Figura 4.6: Gráfico de comparação do deslocamento vertical máximo naquele instante de tempo entre as vigas de concreto com geometria retangular e em I sem amortecedores

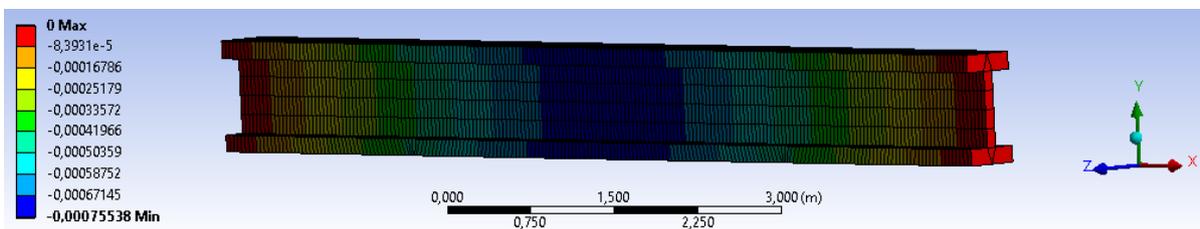


Figura 4.7: Representação da viga de geometria em I de concreto com 2 amortecedores de  $k=50\text{MN/m}$  com deformações em escala real

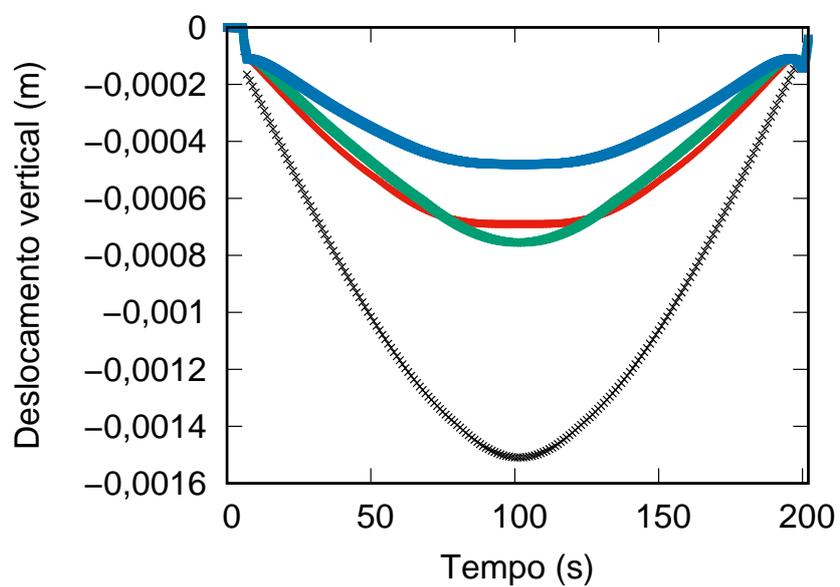


Figura 4.8: Gráfico de comparação do deslocamento vertical máximo naquele instante de tempo entre as vigas de concreto de geometria em I sem (preto) e com um (vermelho) dois (verde) e três (azul) amortecedores de  $k = 50MN/m$

## 4.2 Cálculo sobre vigas de aço

Agora, será alterado somente o material, sem fazer nenhuma alteração nas geometrias das seções transversais. As características do aço foram retiradas da biblioteca de materiais do ANSYS e elas são:

$$\rho_a = 7850 \frac{kg}{m^3} \quad (4.7)$$

$$\sigma_r = 460MPa \quad (4.8)$$

$$E = 200GPa \quad (4.9)$$

### 4.2.1 Viga retangular

Foi simulado a viga sem o amortecedor para saber qual tipo de comportamento era de se esperar quando há ausência de amortecedor. A carga passa por cima da viga e quando chega no centro do vão, a flecha é de  $0,15405mm$ .

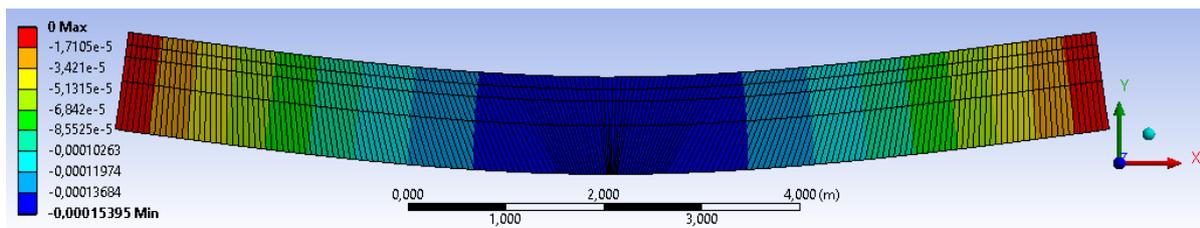


Figura 4.9: Representação da viga de geometria retangular sem amortecedor com deformações em escala de 3000:1

O amortecedor é colocado no meio do vão, ponto onde a flecha é maior, e a nova flecha é de  $0,15403mm$  uma redução de  $2 \times 10^{-5}mm$ ,  $0,01\%$  da flecha original, a mesma mola que apresentou reduções significativas anteriormente apresenta uma diferença mínima.

### 4.2.2 Viga em I

A viga em I selecionada possui a mesma geometria que a viga em I de concreto.

A simulação mostra que a carga passa pela viga e quando chega no meio do vão ela tem flecha igual a  $0,22799mm$ .

Quando colocado o amortecedor, a flecha da viga cai para  $0,22794mm$ . De novo, a diferença gerada pela mola é insignificante. o motivo disso se deve, de novo pelo comportamento da mola.

Como já descrito anteriormente em 4.5 a reação da mola depende diretamente do quanto ela deforma, como a própria deformação da viga é pequena, ela não permite a mola ter uma reação significativa, fazendo com que a flecha não altere tanto, dado que fica extremamente perceptível quando se analisa os gráficos 4.10 e 4.13.

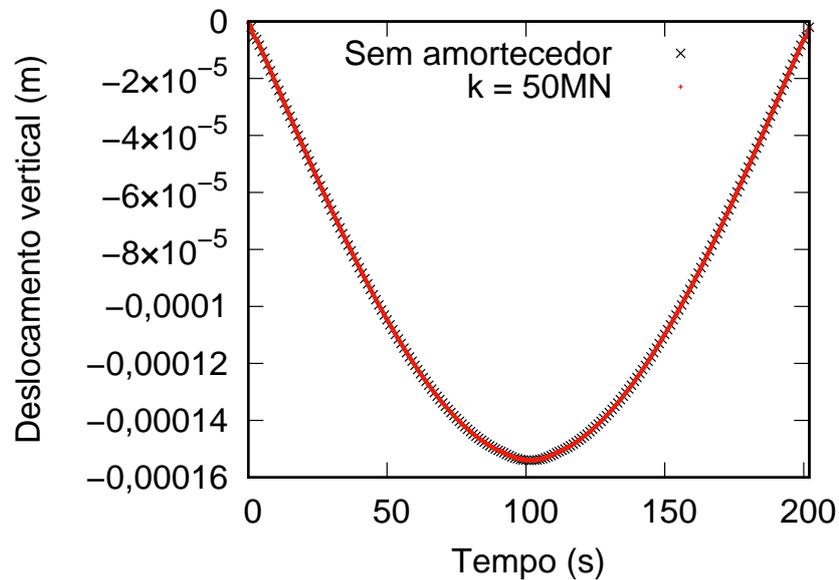


Figura 4.10: Gráfico de comparação do deslocamento vertical máximo naquele instante de tempo da viga de aço sem e com o amortecedor com  $k = 50MN/m$

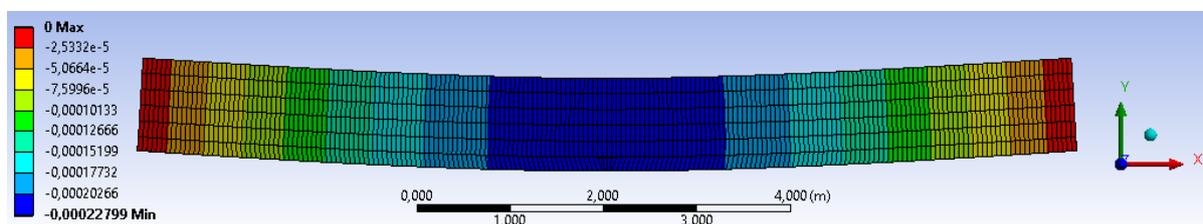


Figura 4.11: Representação da viga de aço com geometria I sem amortecedor com as deformações em escala de 1000:1

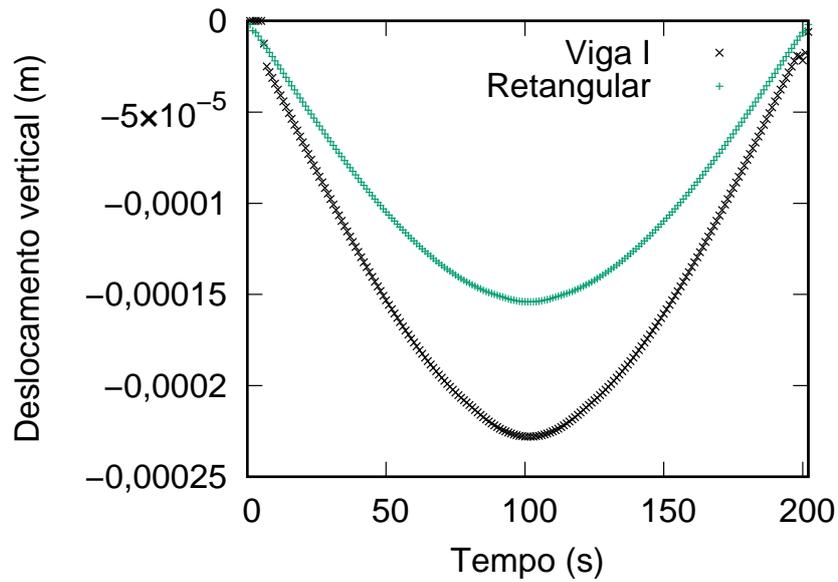


Figura 4.12: Gráfico de comparação do deslocamento vertical máximo naquele instante de tempo entre as vigas de aço de geometria retangular e em I sem amortecedores.

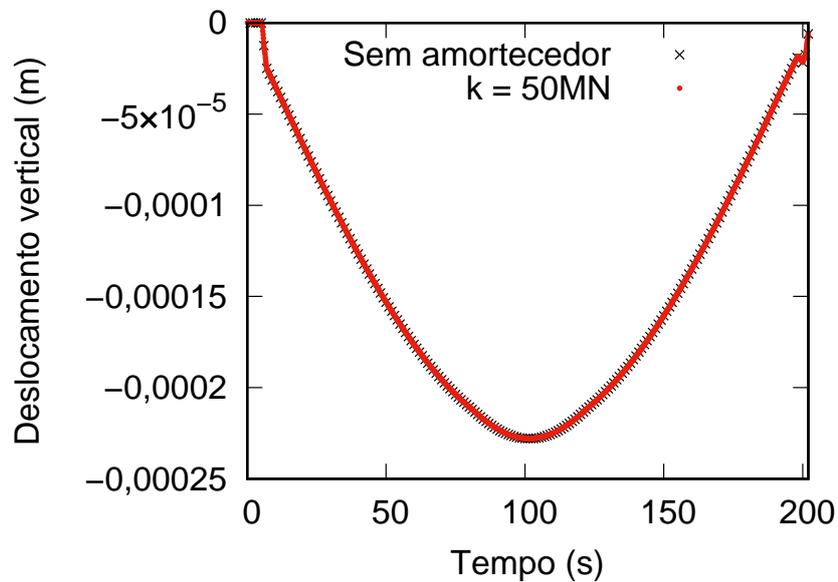


Figura 4.13: Gráfico de comparação do deslocamento vertical máximo naquele instante de tempo entre as vigas com geometrias em I sem e com amortecedor com  $k = 50 \text{ MN/m}$ .

# Conclusão

Com base nos dados adquiridos e analisados, concluiu-se que o software ANSYS é uma ferramenta de uso relativamente fácil de se aprender e extremamente útil, mesmo apresentando dificuldades, como a de mudar o valor de tempo dos passos, impossibilitando a mudança de velocidade da carga dinâmica. Também, que os estudos de fenômenos físicos, como o sistemas massa-mola, pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos aplicados a engenharia civil, como a aplicação de amortecedores em estruturas. O quanto é importante a análise dinâmica para casos onde há presença de elementos onde variam com o tempo, podendo apresentar valores diferentes e de maior solicitação interna da estrutura em função do tempo, assim como causar fadiga na estrutura, mostrando que, em determinados casos, somente uma análise estática poderia não ser o suficiente, pois não garantiria a segurança da estrutura. Amortecedores com funcionamentos similares a molas, como os apresentados nessa pesquisa, podem se mostrar de extrema utilidade, diminuindo a flecha na viga com valores significativos dependendo da constante  $k$  da mola, pois se a mola não for muito rígida, mal afetará na deformação, mas, se for rígida demais, poderá se tornar um apoio rígido, fazendo uma viga primeiramente projetada para ser bi-apoiada em uma viga contínua, podendo gerar patologias na estrutura, mas também da própria flecha que a viga sem o amortecedor sofre, porque uma deformação baixa não permitirá que o amortecedor entre em ação com efetividade, como foi mostrado pelas vigas em aço. Também vê-se que o uso de dois amortecedores na mesma viga pode não ser tão eficiente quanto o de um amortecedor, pois sua eficácia está fortemente relacionada à posição que estes estarão.

Estudos futuros podem ser feitos aumentando o realismo do modelo teórico criado, armando o concreto, por exemplo, também como fazendo outros tipos de análise, como modal e de resposta harmônica, mas também de outros valores de carga dinâmica, mais cargas passando, ou valores diferentes de  $k$  para diferentes posições na viga.



# Referências Bibliográficas

- [1] R. H. V. ABREU. *Análise do comportamento dinâmico em vibração livre de vigas pelo método das diferenças finitas*. UNAMA, Belém, 2012.
- [2] J. B. THORNTON, S. T.; MARION. *Classical dynamics of particles and systems*. Thomson Brooks, Estados Unidos da América, 5 edition, 2004.
- [3] D. G. Zill. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. Cengage Learning, São Paulo, 2 edition, 2011.
- [4] R. P. *et al* FEYNMAN. *Lições de Física de Feynman*, volume 1. Bookman, Porto Alegre, 2008.
- [5] A. F. da S. RODRIGUES. *Vibrações transversais em vigas finitas sujeitas a cargas móveis*. Universidade Nova de Lisboa, Monte da Caparica, 2010.
- [6] A. H. A COSSOLINO, L. C.; PEREIRA. *Amortecimento: classificação e métodos de determinação*. ITC04-ATCP, São Carlos, 2010.
- [7] Z. J. G. N. DA SILVA, E. D.; DEL PRADO. *Controle de vibrações de pontes sujeitas a cargas dinâmicas utilizando amortecedor móvel*.
- [8] S. G. M. N. NEVES. *Análise dinâmica com interação veículo-estrutura em vias de alta velocidade*. FEUP, Cidade do Porto, 2008.
- [9] C. E. ROSSIGALI. *Estudos probabilísticos para modelos de cargas móveis em pontos rodoviárias no Brasil*. UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.